

# DETERMINACIÓN DE LAS TENSIONES LOCALIZADAS DE VON MISES PRODUCIDAS POR DISCONTINUIDADES GEOMÉTRICAS COMBINADAS EN ESTADOS COMPLEJOS DE TENSIÓN.

Dasso, Gabriel M.\*; Amé, Ricardo M. y Lezama Daniel H.

*Facultad de Ingeniería*  
*Universidad Nacional de Lomas de Zamora*  
*Cno. de Cintura y Juan XXIII. Lomas de Zamora. Provincia de Buenos Aires – Argentina*  
*Tel/Fax: +54-1142827880 –*  
*E-mail: [gabriel.dasso@gmail.com](mailto:gabriel.dasso@gmail.com); [ingricardoame@gmail.com](mailto:ingricardoame@gmail.com); [danielhlezama@gmail.com](mailto:danielhlezama@gmail.com)*

## RESUMEN.

Los componentes mecánicos se diseñan con formas diversas que incluyen cambios de sección, agujeros, zonas roscadas, chaveteros y múltiples discontinuidades geométricas; además, se suman los efectos debidos a los procesos tecnológicos de manufactura, tratamientos térmicos y superficiales y de armado; todo lo cual produce elevaciones localizadas de las tensiones. En muchas oportunidades se presenta la superposición de varios de estos efectos en una misma sección o en secciones muy cercanas, dificultando la determinación del valor de las tensiones localizadas, especialmente cuando éstas son de diferente tipo y actúan en distintos planos.

Descripción del trabajo: se aplica el software *ABAQUS* para la determinación del incremento localizado de tensiones de Von Mises en secciones con más de un factor de perturbación. Se elaboran gráficos de utilización simple a los fines prácticos del diseño mecánico.

Metodología: el análisis de casos se limita a cuerpos con discontinuidades geométricas de dimensiones macroscópicas de las entallas. La validez del software se da por aceptada en función de resultados obtenidos en aplicaciones anteriores; luego se aplica a casos particulares de uso corriente en el diseño mecánico.

Resultados: los resultados preliminares indican que los incrementos de los valores de las tensiones de Von Mises, ante la superposición de concentradores, son notablemente inferiores a lo que surge de lo indicado en la diversa bibliografía analizada.

Conclusiones: la información disponible en la bibliografía para obtener la distribución de las tensiones de Von Mises en diseños que presentan discontinuidades geométricas combinadas es escasa. La disponibilidad de herramientas informáticas permite obtener valores para casos complejos. No obstante su aplicación no siempre está al alcance de los diseñadores por su costo o por su complejidad. La confección de gráficos elaborados a partir de los resultados obtenidos por aplicación de dichos *softwares* es práctica y mejora la eficacia de los diseños.

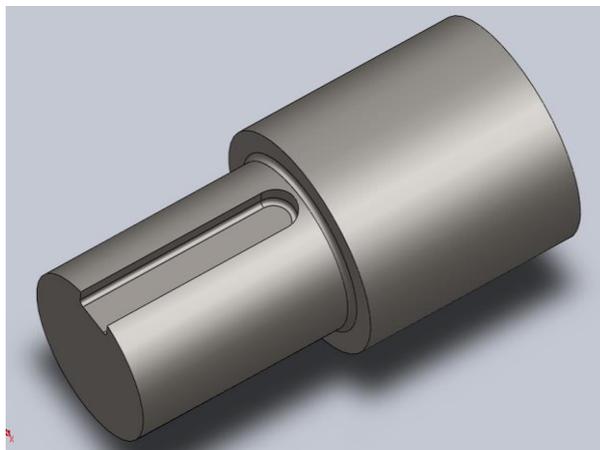
**Palabras Claves:** Concentradores de tensión, tensiones de Von Mises, elementos finitos.

## 1. INTRODUCCIÓN

El diseño mecánico de piezas sometidas a estados complejos de tensión con discontinuidades geométricas combinadas en una misma sección resistente, o en secciones próximas, constituye un tema difícil debido a las múltiples variables de que depende: relaciones geométricas, material, tamaño de grano, cargas variables compuestas. Para resolverlo existen recursos de origen muy antiguo que, aunque efectivos, son limitados. Actualmente con herramientas informáticas se puede resolver casos complejos, a pesar que su aplicación requiere de la disponibilidad del *software* específico y la adecuada capacitación del usuario. Esto último, en general, no es accesible a la mayoría de las pequeñas empresas metal mecánicas ni a los fines prácticos y rápidos del diseño mecánico. Una manera útil de hacer eficiente el diseño es disponer de información cuantitativa para casos genéricos de discontinuidades combinadas habituales en el diseño de componentes mecánicos.

En trabajos anteriores, [1-2] este mismo equipo de investigadores ha obtenido interesantes resultados en el análisis de las tensiones localizadas en componentes mecánicos con discontinuidades geométricas combinadas sometidas a cargas axiales.

A partir de esta experiencia, y de la escasa información disponible para casos más complejos, se ha investigado la forma de variación de las tensiones de Von Mises en un espécimen de análisis consistente en el extremo de un árbol, sometido a momento torsor y flector, con las discontinuidades geométricas combinadas: radio de empalme entre diámetros y ranura de chavetero, como se observa en la Figura 1.



*Figura 1 Objeto de estudio. Extremo de árbol sometido a momento torsor y flector con discontinuidades geométricas combinadas de radio de empalme entre diámetros y ranura de chavetero.*

Los objetivos del presente trabajo son: a) Obtención del factor de concentración de tensiones teórico o geométrico, expresado como relación entre las tensiones de Von Mises, para casos de piezas sometidas a estados complejos de tensiones con más de una discontinuidad geométrica en una misma sección o en secciones muy cercanas, y b) obtener curvas en función de relaciones geométricas que cuantifiquen el factor de concentración teórico o geométrico de tensiones, útiles para el diseño mecánico, para casos de piezas con cargas combinadas, con más de una discontinuidad geométrica en una misma sección o en secciones muy cercanas.

En base a la experiencia anterior, consideramos que en esta oportunidad también se cumplirá que los concentradores de tensión geométricos combinados en una misma sección o en secciones cercanas, de componentes mecánicos sometidos a estados de tensión complejos, no incrementan localmente las tensiones según una ley homogénea.

## 2. MARCO TEÓRICO.

Un típico componente mecánico que transmite momento torsor combinado con esfuerzo de flexión es el árbol. Existen varias teorías para la predicción de la falla; en particular, la de la Máxima Energía de Distorsión o de Von Mises-Hencky es la más aceptada por los diversos autores. Más allá que ambos o al menos uno de los esfuerzos aplicados pueda generar tensiones variables, el empleo de esta teoría de falla presenta la siguiente expresión [3]:

$$\sigma_{1-1} = (\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2)^{1/2} \quad (1)$$

Donde  $\sigma_{1-1}$  es la tensión equivalente o de Von Mises,  $\sigma$  es la tensión normal de flexión y  $\tau$  la tangencial de corte. En situaciones que implican esfuerzos combinados, en el mismo punto de una sección, como en el caso del árbol, la (1) es una expresión práctica para definir la tensión que representa la combinación de las normales y tangenciales. La tensión efectiva  $\sigma_{1-1}$  de Von Mises se define como “aquella tensión uniaxial que generaría la misma energía de distorsión que la que se produciría por la combinación real de los esfuerzos aplicados” [4].

Los resultados de los ensayos que se han efectuado sobre diversos materiales [4] muestran una tendencia a coincidir con la teoría de falla indicada y permiten afirmar que es aplicable para casos de carga estática y materiales dúctiles homogéneos.

## 3. OBJETO DE ESTUDIO, ANTECEDENTES, HERRAMIENTAS, RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

### 3.1. Objeto de estudio.

Nuestro objeto de estudio es el extremo de un árbol sometido a momento torsor y flexión, como se muestra en la Figura 2.

Las dimensiones del mismo son: Diámetro mayor (D) 99,75 mm, diámetro menor (d) 75,00 mm, relación D/d= 1,33, (Peterson [5] pág., 76, Fig. 67), radio del encuentro (r) 2.50 mm (tomado de un manual de SKF como radio para alojar un rodamiento 6415), luego resulta la relación  $r/d = 2,50/75 = 0,0333$ .

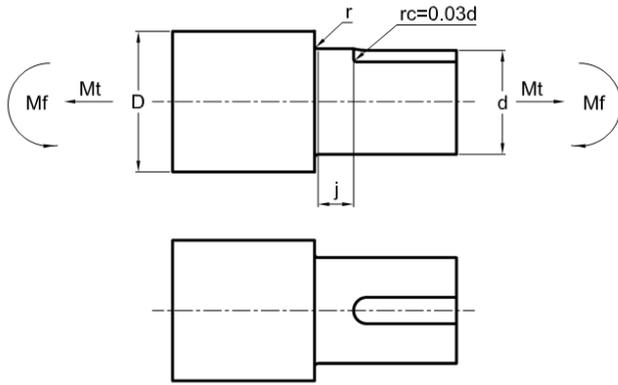


Figura 2. Detalle de dimensiones y cargas actuantes en el espécimen objeto de estudio.

La ranura para la chaveta tiene las siguientes dimensiones: profundidad  $t = d/8 = 75/8 = 9.375$  mm, ancho  $b = d/4 = 18.75$  mm, ubicada en las proximidades del radio de empalme entre los dos diámetros de las secciones transversales del árbol, constituyendo el conjunto de discontinuidades geométricas combinadas cuyo efecto sobre las tensiones se desea estudiar. La distancia  $J$  entre el inicio del chavetero y el fin del empalme será el parámetro geométrico a variar.

### 3.2. Antecedentes.

Dejando de lado la determinación del factor de concentración de tensiones para el cambio de diámetro o chavetero, tomados por separado, en presencia de tensiones simples o combinadas, los cuales se pueden encontrar en varios trabajos bibliográficos; la disposición asociada de ambos concentradores en presencia de esfuerzos exteriores combinados no se presenta tratada adecuadamente.

Niemann [6] la expone en forma parcial e incompleta; en Forrest [7] lo más cercano a lo que estamos tratando, se puede leer en las páginas 327 y subsiguientes donde presenta el trabajo realizado por Gough relacionado a la combinación de los esfuerzos de flexión y torsión en presencia de chaveteros únicamente.

Por su parte, Faires [8] trata el tema de los concentradores combinados en forma muy genérica, ofreciendo un consejo de aplicación de dudosa confiabilidad; Deutschman et. al. [9] refiriéndose a la posibilidad de encontrarse con dos concentradores de tensión, expresa: *“la escasa información disponible indica que los resultados acumulativos de los dos factores son mayores que el de cada uno de los factores individuales pero menor que el producto de ambos factores. Sin embargo, Lipson y Juvinal sugieren se use el producto de ambos factores teóricos de concentración de esfuerzo en la ecuación de sensibilidad de muesca para obtener  $K_f$  o  $K_{fs}$ ”*. Yendo a los autores citados, Lipson y Juvinal [10] indican, en el capítulo 11 de la parte II: *“En muchos casos, los miembros de máquinas no contienen un concentrador de tensión simple sino muchas discontinuidades tales como tipos de tensión se encuentran envueltas. El factor total de concentración resultante de tan grande número de entallas no puede ser relativo a los factores de concentración individuales debido al efecto de acoplamiento de las tensiones causada por el enlace entre los concentradores de tensión”*, y finalmente, tras proponer efectuar el producto de los factores individuales, sugieren efectuar ensayos debido a que sus resultados posiblemente arrojen un valor menor al calculado.

Se puede observar que a partir de la bibliografía consultada, sólo la señalada en este párrafo presenta algún tipo de sugerencia al tratamiento de los concentradores combinados, en cierto modo deficitario e incompleto, por lo que hace poco confiable su aplicación.

### 3.3. Herramientas.

Se utilizó el *software* ABAQUS para la determinación de las tensiones en los puntos **A** y **B** del chavetero (según Chart 5.1 pág. 430 de Pilkey y Pilkey [11]) y en el final del empalme entre las dos secciones. Para ello se definió el valor de los momentos torsor y flector (expresados en Nmm), el coeficiente de Poisson en 0,3, el módulo de elasticidad longitudinal de los aceros: 210 000 MPa y se trabajó con mallado adaptativo con 5 iteraciones.

El *software* ya había sido convalidado por los autores en trabajos anteriores [1].

### 3.4. Resultados.

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 1 y en el gráfico de la Figura 4.

Distancia J desde el borde del radio de acuerdo al inicio del chavetero. mm	Máxima tensión en el punto A del chavetero. MPa	Máxima tensión en el empalme del radio de acuerdo. MPa.
25	396	375
10	396	383
5	395	376
2	397	405
1	395	396
0	398	397

Tabla 1. Variación de las tensiones de Von Mises en los punto A y B.

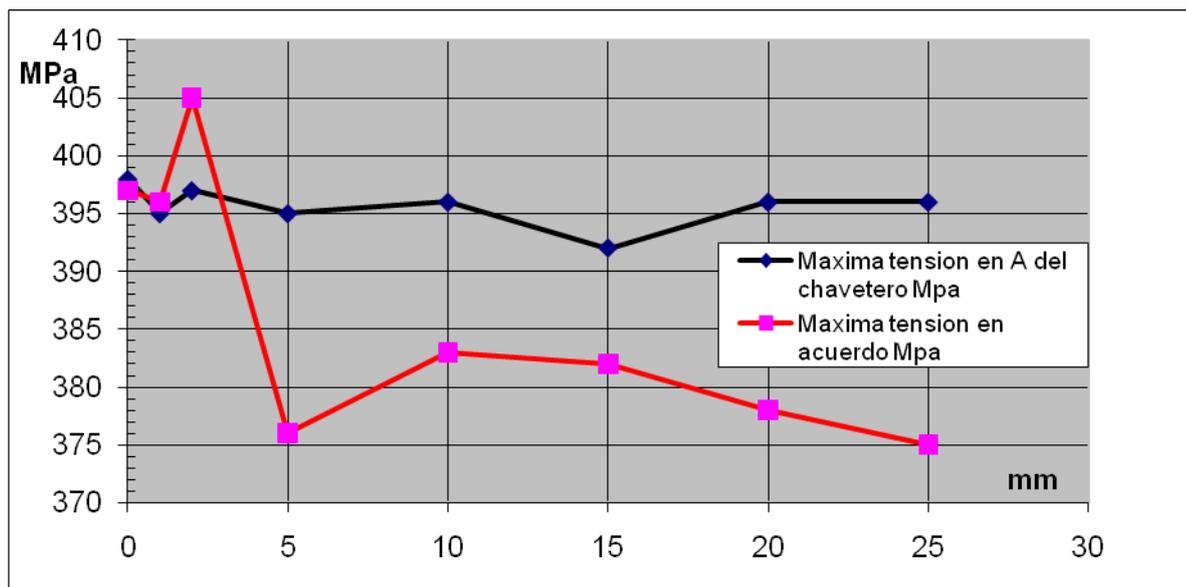


Figura 4. Variación de las tensiones de Von Mises en los puntos A y B.

Por otra parte, se ha calculado de la manera tradicional, las tensiones nominales de Von Mises, conociendo el valor de los momentos torsor y flector, con la sección neta de diámetro  $d$ , sin concentradores de ningún tipo. Este cálculo ha dado  $\sigma' = 210,48$  MPa.

### 3.4. Análisis de los resultados.

A partir de estos resultados se ha calculado la relación entre los valores del gráfico Figura 4 y el teórico.

Se observa que la tensión en el punto **A** del chavetero no presenta variaciones significativas frente a su proximidad o lejanía con el radio de empalme entre ambos diámetros. Su valor se mantiene prácticamente constante en 396,16 MPa de promedio. Esto indicaría que no le afecta la presencia de esa discontinuidad geométrica. Se aconseja, entonces utilizar el valor de  $K_t = 1,88$  obtenido entre la relación  $396,16/210,48$ .

Por el contrario, la tensión en el punto final del empalme se ve afectada según su cercanía con el comienzo del chavetero. Si hacemos la relación entre la tensión obtenida para  $J = 0$  y el promedio de tensión para la separación  $J = 5$  mm y  $J = 25$  mm (igual a 378 MPa), obtenemos  $\Delta = 1,05$ . Esto nos está indicando que el factor de concentración de tensiones varía de la misma manera:  $K_t = 397/210,48 = 1,886$  para  $J = 0$  a  $K_t = 378/210,48 = 1,795$  a partir de  $J \geq 10$  mm.

## 4. CONCLUSIONES

Los resultados evidencian que la tensión en el punto **A** del chavetero no es afectada por la discontinuidad combinada con el radio de empalme entre diámetros.

La tensión en el punto de empalme entre el radio y el diámetro menor, sí es afectada por la cercanía con la discontinuidad geométrica del chavetero. En este estudio, la distancia  $J = 5$  mm, establece el límite a partir de la cual, si  $J$  aumenta, la tensión se normaliza en un valor constante y si  $J$  disminuye se produce el incremento de la tensión en 1,05 veces.

Es notable que una de las tensiones se vea afectada y la otra no estando en el mismo cuerpo y en puntos muy cercanos entre sí.

No se ha encontrado un comportamiento funcional de la variación de tensión, correspondiente con la variación de la distancia  $J$ , igual o similar para ambos puntos estudiados. Sólo la tensión en el empalme presenta un comportamiento variable sencillo.

Los valores de los coeficientes de concentración teóricos hallados indican que son notablemente inferiores a lo que surge de lo expuesto en la bibliografía descrita.

## 6. REFERENCIAS

[1] G.M. Dasso; R. M. Amé y D. H. Lezama, Nuevos aportes al análisis de las tensiones localizadas producidas por discontinuidades geométricas combinadas. Una aplicación del análisis de tensiones por elementos finitos, *Anales del Primer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica*, Bahía Blanca, Argentina, octubre 2008.

[2] R.M. Amé; G.M. Dasso, Concentración de tensiones producida por discontinuidades geométricas combinadas. Una exploración del estado del arte. *Anales del Primer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica*, Bahía Blanca, Argentina, octubre 2008.

- [3] N. E. Frost; K. J. Marsh y L. P. Pook, *Metal Fatigue*, Oxford University Press, Canada, 1999.
- [4] R. L. Norton, *Diseño de máquinas*, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1999.
- [5] R.E. Peterson, *Stress concentration design factors. Charts and relations usefullin making strength calculations for machine parts and structural elements*, Editorial John Wiley & Sons, Inc. EEUU, 1974.
- [6] G. Niemann, *Tratado teórico práctico de elementos de máquinas, cálculo, diseño y construcción*, Tomo II, Editorial Labor, 1993.
- [7] P.G. Forrest, *Fatiga de los metales*, Urmo S.A. de Ediciones, España, 1982.
- [8] V.M. Faires, *Diseño de elementos de máquinas*, Editorial Montaner y Simon S.A. Editores, España, 1970.
- [9] A.D. Deutschman; W.J. Michels y C.E.Wilson, *Diseño de máquinas. Teoría y práctica*, Compañía Editorial Continental, México, 1985.
- [10] C. Lipson y R.C. Juvinall, *Handbook of stress and strenght. Design and material applications*, 1º edición, Editorial The MacMillan Company, EEUU, 1963.
- [11] Pilkey, Walter D., Pilkey, Deborah F. *Peterson´s Stress Concentration Factors*. 3º edición. 2008.